REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
Lycée Bachir Sfar Amdoun Béja

Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4 h
Coefficient : 4
Section : MATHEMATIQUES
Prof : Ghomriani Béchir

Exercice 1 : $(3,5pts)$

A 8^h du matin un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. On désigne par q_i la quantité de médicament présente dans le sang à l'instant t_i .
A l'aide des prises de sang, on a mesuré ces quantités après chaque heure. On a obtenu ainsi une série statistique double (t,q) représentée dans le tableau suivant :

L'heure exacte	8^h du matin	9^h du matin	10^h du matin	11^h du matin	Midi	13^h	14^h
$t_i\,(en\ heures)$	0	1	2	3	4	5	6
$q_i\,(en\ milligrammes)$	9,9	8,7	7,8	6,4	5,6	4,2	3,8

1. a. Construire dans un repère orthogonal le nuage de points de la série (t,q).
   b. Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?
   c. Calculer $\operatorname{cov}(t,q)$.Interpréter le résultat.
2. a. Déterminer une équation de la droite de régression de $q\ en\ t$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à l'unité)
   b. Déterminer la quantité éliminées par les reins à $15^h:30mn$
   c. à quelle heure exacte les reins ont réussis à éliminer 8 milligrammes de ce médicament ?
3. On pose : $y=\ln(q)$, on obtient le tableau suivant :

t_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	2,29	2,16	2,05	1,86	1,72	1,44	1,34

   a. Donner une équation de la droite de régression de $y\ en\ t$ (les coefficients seront arrondis au millième)
   b. En déduire qu'un ajustement non affine de $q\ en\ t$ est $q=10,298\times e^{-0,165t}$
4. On suppose que ce modèle reste valable jusqu'aux 48 heures.
   a. Dans combien d'heures le sang contient moins de 0,9 milligrammes de ce médicament ?
   b. Le lendemain le patient se réveille à 9^h du matin il fait ces calculs pour savoir la quantité de médicament qui reste dans le sang et il trouve que le sang contient moins de 0,05 milligrammes. A –t-il raison ? Justifier

Exercice 2 : $(5pts)$

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=14 \\ u_{n+1}=5u_n-6\ ;\ n\in IN \end{cases}$

1. a. Montrer que pour tout $n\in IN$: $u_{n+2}\equiv u_n\,(\bmod 4)$
   b . En déduire que pour tout $n\in IN$: $u_{2n}\equiv 2(\bmod 4)\quad et\quad u_{2n+1}\equiv 0(\bmod 4)$
2. a . Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$: $2u_n=5^{n+2}+3$
   b . déduire que pour tout $n\in IN$: $2u_n\equiv 3(\bmod 25)$
3. a . Déterminer l'inverse modulo $25\ de\ 2$

b . déduire que pour tout $n \in IN$: $u_n \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 25)$

4. On considère l'équation $(E): 4x - 25y = 14$
   a. Justifier que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   b. En remarquant que $(16,2)$ est une solution de (E) montrer que $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(25k+16; 4k+2); k \in \mathbb{Z}\}$

5. a .Soit N un entier vérifiant le système $(S): \begin{cases} N \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ N \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 25) \end{cases}$

   Montrer que N est solution de (S) si et seulement si $N \equiv 64 (\mathrm{mod}\, 100)$

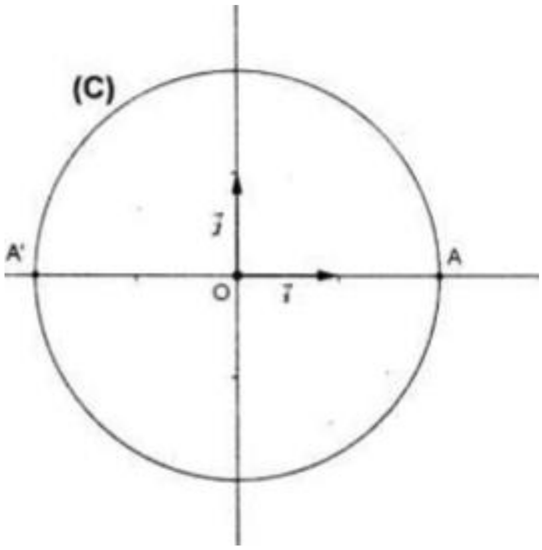
   b. Déterminer suivant les valeurs de n (pair , impair)les deux derniers chiffres ² de u_n

6. a . Justifier que $5^{n+2} \equiv (-1)^n (\mathrm{mod}\, 3)$

   b . En déduire que $u_n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \quad ou \quad u_n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$

   c . Montrer alors que $u_n \wedge u_{n+1} = 2$ pour tout $n \in IN$

Exercice 3 : $(3pts)$



Dans la figure ci-contre, $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et (C) est le cercle de centre O passant par les points $A(2,0)$ et $A'(-2,0)$.

1) Soit $P(x,y)$ un point du plan n'appartenant pas à $(O,\vec{i})$, H son projeté orthogonal sur l'axe $(O,\vec{i})$ et $M(X,Y)$ le milieu du segment $[PH]$
   a- Exprimer X et Y en fonction de x et y
   b- Montrer que lorsque P varie sur le cercle (C) , M varie sur l'ellipse (E) d'équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$
   c- Tracer l'ellipse (E)

2) Soit $P_0(1, \sqrt{3})$ et $M_0\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Soit (T) la tangente au cercle (C) en P_0
   a- Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente (T) est $(T): "x + \sqrt{3}\, y - 4 = 0"$
   b- Vérifier que la tangente (T) coupe l'axe des abscisses au point $I(4,0)$
   c- Montrer que la tangente à l'ellipse (E) en M_0 passe par I

Exercice N°4 : $(2,5pts)$

On considère deux urnes $A: \begin{cases} 6\, boules\ Blanches \\ 4\, boules\ Noires \end{cases}$ et $B: \begin{cases} 8\, boules\ Blanches \\ 2\, boules\ Noires \end{cases}$

D'une des deux urnes choisie au hasard (il ya équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne.

- Si elle est blanche on recommence le tirage dans la même urne
- Si elle est noire on recommence le tirage dans l'autre urne

Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

On note A_n :" le $n^{ème}$ tirage se fait dans l'urne A" et $a_n = p(A_n)$

1) a . Déterminer a_1

b . A l'aide d'un arbre de choix déterminer a_2

2) A l'aide d'un arbre de choix montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{1}{5}$

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 1$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la limite

b- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

c- Déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,334$

<u>Exercice 5 :</u> $(6\,pts)$

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

c) Justifier que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) a) Montrer pour tout réel $t > 0$ que : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

b) En déduire pour tout $x > 0$ que : $\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

c) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à C_f

d) Tracer la courbe C_f

II) n est un entier naturel non nul soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1)a) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0

b) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0,+\infty[$

b) Monter pour tout $x > 0$ que $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

c) En déduire que (α_n) est décroissante et quelle converge vers un réel L

d) Montrer que : $n\alpha_n = 2e^{\frac{2}{\alpha_n}} - 2$

e) En déduire que L=0